© Ольшевский Андрей Георгиевич
Консультирую по скайп: da.irk.ru

Геометрия 7, 8, 9, 10, 11 класс

Иркутск 2017

Оглавление

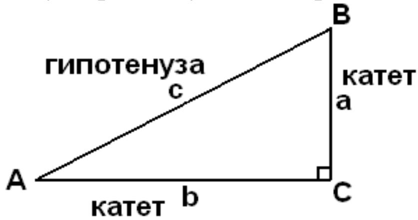
7 класс (до 128 с)

Условие существования треугольника

Сторона треугольника меньше суммы двух других сторон.

Теорема Пифагора

Квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов



$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Трапеция

Трапеция – это четырехугольник, у которого две стороны, называемые основаниями, параллельны, а две другие стороны, называемые боковыми сторонами, не параллельны.

Равнобедренная трапеция имеет равные боковые стороны.

Прямоугольная трапеция содержит прямой угол.

Прямоугольник

Прямоугольник - это параллелограмм, все углы которого прямые.

Теоремы из 7 класса распределить по разделам

При пересечении параллельных прямых секущей соответственные углы равны.

Теорема. Сумма углов треугольника равна 180^0.
a || AC
Накрест лежащие углы равны:

$\angle A = \angle 4$; $\angle C = \angle 5$;
Углы образуют развернутый угол:
$\angle 4 + \angle 2 + \angle 5 = 180^0$.
Заменим равными углами
$\angle A + \angle B + \angle C = 180^0$.
Теорема доказана.

Внешний угол треугольника является смежным с внутренним углом треугольника.
Теорема. Внешний угол треугольника равен сумме внутренних углов треугольника, не смежных с этим внешним углом.
Доказательство
Смежные углы:
$\angle 3 + \angle 4 = 180^0$.
Сумма углов треугольника:
$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180^0$.
Приравняем левые части равенств
$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = \angle 3 + \angle 4$.
Сократим $\angle 3$
$\angle 1 + \angle 2 = \angle 4$.
Теорема доказана.

8 класс (от 128 до 256 с)

Сумма углов выпуклого n-угольника

У выпуклого n-угольника сумма углов равна $(n - 2)\cdot 180^0$.

Если углы α выпуклого n-угольника равны, то их сумма равна $n\alpha$

$$n\alpha = (n - 2)\cdot 180^0.$$

Величина угла правильного n-угольника

Величина угла α правильного n-угольника

$$\alpha = \frac{(n-2)\cdot 180^0}{n} = \frac{n-2}{n}\cdot 180^0 = \left(\frac{n}{n} - \frac{2}{n}\right)\cdot 180^0 = \left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdot 180^0$$

$$\alpha = \frac{(n-2)\cdot 180^0}{n} = \frac{n\cdot 180^0 - 2\cdot 180^0}{n} = \frac{n\cdot 180^0}{n} - \frac{2\cdot 180^0}{n} =$$

$$= 180^0 - \frac{360^0}{n} = 180^0 \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right)$$

$$\alpha = \frac{(n-2)}{n}\cdot 180^0 = 180^0 \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right)$$

Определим число сторон правильного n-угольника по известному углу α

1 способ

$$\alpha = \left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdot 180^0$$

$$\alpha = 180^0 - \frac{2\cdot 180^0}{n}$$

$$\alpha = 180^0 - \frac{360^0}{n}$$

$$\frac{360^0}{n} = 180^0 - \alpha$$

$$\frac{360^0}{180^0 - \alpha} = n$$

$$n = \frac{360^0}{180^0 - \alpha}$$

2 способ

$$\alpha = \left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdot 180^0$$

$$\frac{\alpha}{180^0} = 1 - \frac{2}{n}$$

$$\frac{\alpha}{180^0}-1=-\frac{2}{n}$$

$$-\left(\frac{\alpha}{180^0}-1\right)=\frac{2}{n}$$

$$-\frac{\alpha}{180^0}-(-1)=\frac{2}{n}$$

$$-\frac{\alpha}{180^0}+1=\frac{2}{n}$$

$$1-\frac{\alpha}{180^0}=\frac{2}{n}$$

$$\frac{180^0-\alpha}{180^0}=\frac{2}{n}$$

$$n=\frac{2\cdot 180^0}{180^0-\alpha}$$

$$n=\frac{360^0}{180^0-\alpha}$$

3 способ

Если углы α выпуклого n-угольника равны, то их сумма равна $n\alpha$

$$n\alpha=(n-2)\cdot 180^0$$

$$\frac{n}{n-2}=\frac{180^0}{\alpha}$$

$$\frac{n-2+2}{n-2}=\frac{180^0}{\alpha}$$

$$\frac{n-2}{n-2}+\frac{2}{n-2}=\frac{180^0}{\alpha}$$

$$1+\frac{2}{n-2}=\frac{180^0}{\alpha}$$

$$\frac{2}{n-2}=\frac{180^0}{\alpha}-1$$

$$\frac{2}{n-2}=\frac{180^0-\alpha}{\alpha}$$

$$\frac{2\alpha}{180^0-\alpha}=n-2$$

$$\frac{2\alpha}{180^0-\alpha}+2=n$$

$$n=\frac{2\alpha}{180^0-\alpha}+2$$

$$n=\frac{2\alpha+2\cdot(180^0-\alpha)}{180^0-\alpha}$$

$$n=\frac{2\alpha+2\cdot180^0-2\alpha}{180^0-\alpha}$$

$$n=\frac{2\cdot180^0}{180^0-\alpha}$$

$$n=\frac{360^0}{180^0-\alpha}$$

Синус

Окружность

Теорема о вписанном в окружность угле

Вписанным называется угол с вершиной на окружности и сторонами, пересекающими окружность.

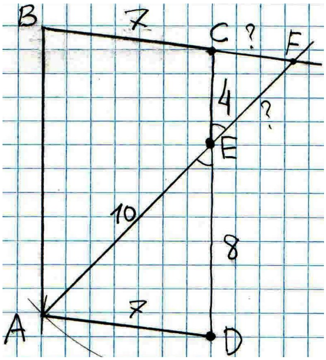
Вписанный угол равен половине центрального угла и дуги, на которую углы опираются.

Признаки подобия треугольников

Задача 551 а [Геометрия 7-9]
Дано:

На стороне CD параллелограмма $ABCD$ отмечена точка E. Прямые AE и BC пересекаются в точке F. Найдите: а) EF и FC, если $DE=8$ см, $EC=4$ см, $BC=7$ см, $AE=10$ см; б) DE и EC, если $AB=8$ см, $AD=5$ см, $CF=2$ см.

Решение



1.Вертикальные углы равны ∠AED = ∠CEF.

2.Накрест лежащие углы равны ∠ADE = ∠FCE.

3.ΔAED ~ ΔCEF по первому признаку подобия (по 2-м углам). Отношения соответствующих сторон подобных треугольников равны

$$\frac{EF}{AE} = \frac{FC}{AD} = \frac{EC}{DE}$$

$$\frac{EF}{10} = \frac{FC}{7} = \frac{4}{8}$$

Сократим

$$\frac{EF}{10} = \frac{FC}{7} = \frac{1}{2}$$

$$EF = \frac{10}{2} = 5 \text{ (см);}$$

$$FC = \frac{7}{2} = 3{,}5 \text{ (см).}$$

Ответ: EF = 5 см, FC = 3,5 см.

Вписанная окружность

Вписанная окружность касается всех сторон многоугольника, который называется описанным около этой окружности.

Вписать окружность можно в любой треугольник и притом только одну.

Вписать окружность можно не в любой многоугольник.

Вписать окружность можно в выпуклый четырехугольник, суммы противоположных сторон которого равны.

Описанная окружность

Описанная окружность проходит через все вершины многоугольника, который называется вписанным в эту окружность.

9 класс

Коллинеарные векторы

Коллинеарные векторы – это векторы, находящиеся на одной прямой или на параллельных прямых.

Лемма о коллинеарных векторах

$$\vec{b} = k\,\vec{a}$$

Средняя линия трапеции

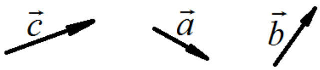
Средняя линия трапеции равна полусумме оснований и параллельна основаниям.

Разложение вектора по двум неколлинеарным векторам

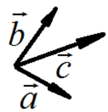
Любой вектор $\vec{c}$ единственным образом разлагается на плоскости по двум неколлинеарным данным векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ с единственными коэффициентами разложения x и y:

$$\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$$

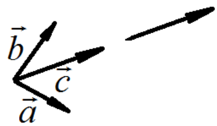
Разложим заданный вектор $\vec{c}$ по заданным неколлинеарным векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$:



Проведем из одной точки заданные векторы



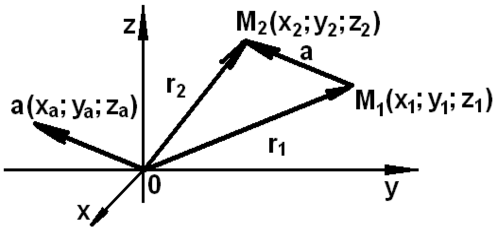
Из конца вектора $\vec{c}$ проведем прямые, параллельные векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ до пересечения с лучами, сонаправленными с векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Получим параллелограмм



Координаты вектора

Если вектор $\vec{a} = \overrightarrow{M_1M_2}$ задан точками $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$, то его координаты

$$\vec{a} = \overrightarrow{M_1M_2} = \vec{r_2} - \vec{r_1} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)$$



Длина вектора

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(2-(-3))^2 + (1-4)^2} = \sqrt{(2+3)^2 + (-3)^2} =$$
$$= \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$$

$$\mathrm{A_1A_2} = \sqrt{(\mathrm{x}_2 - \mathrm{x}_1)^2 + (\mathrm{y}_2 - \mathrm{y}_1)^2 + (\mathrm{z}_2 - \mathrm{z}_1)^2}$$

Расстояние между точками $M_1(x_1;\ y_1)$ и $M_2(x_2;\ y_2)$

$$M_1M_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Длина вектора

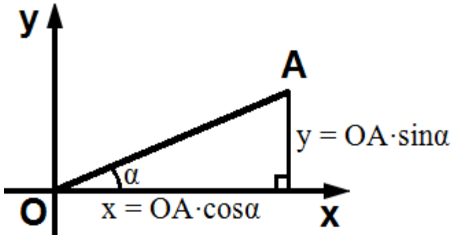
$$\left|\vec{a}\right| = \left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

$M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$

$$M_1M_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Координаты точки по формулам тригонометрии

Координаты точки А, находящейся на расстоянии ОА от начала координат О

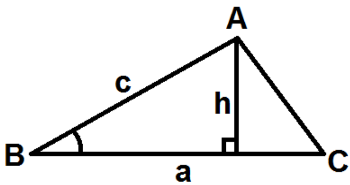


$$x = OA \cdot \cos\alpha$$

$$y = OA \cdot \sin\alpha$$

Теорема о площади треугольника

Площадь треугольника



$$S_\Delta = \frac{1}{2}ah$$

В прямоугольном треугольнике

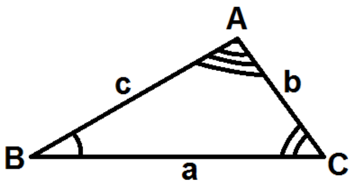
$$h = c \cdot \sin B$$

$$S_\Delta = \frac{1}{2}ac\sin B$$

Площадь треугольника равна половине произведения двух сторон треугольника на синус угла между ними.

$$S_\Delta = \frac{1}{2}\mathrm{ac}\sin(\mathrm{a}\hat{;}\mathrm{c})$$

Теорема синусов



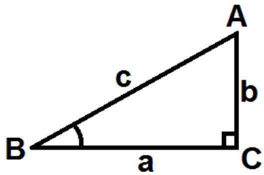
Стороны треугольника пропорциональны синусам противоположных углов

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

Отношение стороны треугольника к синусу противоположного угла равно диаметру описанной окружности

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = D = 2R$$

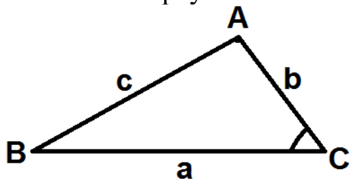
Теорема косинусов



По теореме Пифагора квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Рассмотрим произвольный треугольник



Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон минус удвоенное произведение этих сторон на косинус угла между ними

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C.$$

При $C = 90^0$ $\cos 90^0 = 0$, получаем

$$c^2 = a^2 + b^2$$

в соответствии с теоремой Пифагора, поэтому теорему косинусов называют обобщенной теоремой Пифагора.

Решение треугольников

Решение треугольника – это нахождение по трем данным элементам остальных трех элементов, определяющих треугольник (трех сторон и трех углов). Трех заданных углов не достаточно для решения треугольника, потому что размер треугольника в этом случае может быть любым. При решении треугольника могут использоваться теоремы косинусов, синусов и возможность определения третьего угла путем вычитания из 180^0 двух известных углов.

Попарно приравнивая элементы из теоремы синусов

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

можно определить неизвестный элемент по трем известным. Например, приравняв

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$$

можно определить

$$a = \frac{c \sin A}{\sin C}$$

или

$$\sin A = \frac{a \sin C}{c}$$

Из теоремы косинусов

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos A}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$2ac \cos B = a^2 + c^2 - b^2$$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

$$2ab \cos C = a^2 + b^2 - c^2$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

Из формулы суммы углов треугольника

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^0$$

можно найти любой угол по известным двум другим.

Угол между векторами

Угол между векторами – равен углу между проведенными из одной точки лучами, сонаправленными с этими векторами. Угол между сонаправленными векторами равен 0^0. Угол между перпендикулярными векторами равен 90^0.

Скалярное произведение векторов

Скалярное произведение двух векторов – это произведение длин векторов на косинус угла между ними

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)$$

Если ненулевые векторы перпендикулярны, то их скалярное произведение равно нулю $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$. Так как $\cos 90^0 = 0$.

Если $\widehat{\vec{a},\vec{b}}<90^0$, то $\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)>0$, следовательно $\vec{a}\cdot\vec{b}>0$. При уменьшении угла между векторами $\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)$ возрастает и достигает максимального значения при $\widehat{\vec{a},\vec{b}}=$ 0^0, то есть при сонаправленности векторов $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$. Так как $\cos 0^0 = 1$, то $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$.

Если $\widehat{\vec{a},\vec{b}}>90^0$, то $\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)<0$, следовательно $\vec{a}\cdot\vec{b}<0$. При увеличении угла между векторами $\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)$ уменьшается и достигает минимального значения при $\widehat{\vec{a},\vec{b}}=$ 180^0, когда векторы противоположно направлены $\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b}$. Так как $\cos 180^0 = -1$, то $\vec{a}\cdot\vec{b}=-|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$.

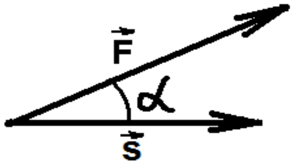
Скалярный квадрат вектора

$$\vec{a}\cdot\vec{a}=\vec{a}^{\,2}=|\vec{a}|^2$$

Физический смысл скалярного произведения векторов

Из курса физики известно, что работа A силы $\vec{F}$ при перемещении тела $\vec{s}$ равна произведению длин векторов силы $\vec{F}$ и перемещения $\vec{s}$ на косинус угла между ними, то есть равна скалярному произведению векторов силы и перемещения

$$A = \vec{F} \cdot \vec{s} = |\vec{F}| \cdot |\vec{s}| \cos\left(\widehat{\vec{F}, \vec{s}}\right)$$



Если $\widehat{\vec{F}, \vec{s}} < 90^0$, то работа силы $\vec{F}$ на перемещении $\vec{s}$ положительна A > 0.

Если $\widehat{\vec{F}, \vec{s}} = 90^0$, то работа силы $\vec{F}$ на перемещении $\vec{s}$ равна нулю A = 0.

Если $\widehat{\vec{F}, \vec{s}} > 90^0$, то работа силы $\vec{F}$ на перемещении $\vec{s}$ отрицательна A < 0.

Задача. Определить работу силы тяжести при подъеме легкового автомобиля массой 1 тонна по трассе длинной 1 км, имеющей угол наклона 30^0 к горизонту. Сколько литров воды при температуре 20^0 можно вскипятить, используя эту энергию?

Скалярное произведение векторов в координатах

Скалярное произведение векторов $\vec{a} = \{x_a; y_a\}$ и $\vec{b} = \{x_b; y_b\}$ в прямоугольной системе координат

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_a x_b + y_a y_b$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b$$

Угол между векторами

Если ненулевые векторы $\vec{a} = \{x_a; y_a\}$ и $\vec{b} = \{x_b; y_b\}$ перпендикулярны, то их скалярное произведение равно нулю

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0,$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_a x_b + y_a y_b = 0.$$

Косинус угла между ненулевыми векторами

$$\cos\left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}\right) = \frac{x_a x_b + y_a y_b}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2} \cdot \sqrt{x_b^2 + y_b^2}}$$

$$\cos\left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}\right) = \frac{x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2} \cdot \sqrt{x_b^2 + y_b^2 + z_b^2}}$$

Свойства скалярного произведения векторов

Свойства скалярного произведения справедливы при любых $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, k:

1. $\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^{\,2} = |\vec{a}|^2 \geq 0$, если $\vec{a} \neq \vec{0}$, то $\vec{a}^{\,2} = |\vec{a}|^2 > 0$ ·

2.Переместительный закон $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

3.Распределительный закон $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$

4.Сочетательный закон $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b})$

Площадь треугольника по формуле Герона

Формула Герона

$$S_\Delta = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

где полупериметр p определяется по формуле

$$p = \frac{a+b+c}{2},$$

a, b, c – стороны треугольника.

Площадь треугольника

$$S_{\Delta} = pr,$$

где r – радиус вписанной в треугольник окружности.

Площадь треугольника

$$S_{\Delta} = \frac{abc}{4R}$$

где R – радиус описанной около треугольника окружности.

Из формул площади треугольника

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2}\mathrm{ah} = \frac{1}{2}\mathrm{absinC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = pr = \frac{abc}{4R}$$

и равенства, содержащего теорему синусов

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = D = 2R$$

можно определить неизвестную величину по заданным величинам.

Задача. По трем сторонам треугольника a, b, c определить три угла, радиусы вписанной r и описанной R окружностей.

Решение

Определяем полупериметр

$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

По формуле Герона определяем площадь

$$S_{\Delta} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

Из формулы площади треугольника

$$S_{\Delta} = pr$$

определяем радиус вписанной окружности

$$r = \frac{S_\Delta}{p}$$

Из формулы площади треугольника

$$S_\Delta = \frac{abc}{4R}$$

определяем радиус описанной окружности

$$R = \frac{abc}{4S_\Delta}$$

Из теоремы косинусов можем определить косинусы всех трех углов. Или используя теорему синусов

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = D = 2R$$

можем найти синусы углов

Подставив

$$R = \frac{abc}{4S_\Delta},$$

получаем

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2\frac{abc}{4S_\Delta}$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{abc}{2S_\Delta}$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{abc}{2S_\Delta}$$

$$\sin A = \frac{2S_\Delta a}{abc} = \frac{2S_\Delta}{bc}$$

$$\sin A = \frac{2S_\Delta}{bc}$$

Правильный многоугольник

Правильный многоугольник – это выпуклый многоугольник, у которого равны все углы, а также стороны.

Сумма углов и угол правильного многоугольника

Сумма углов правильного n-угольника

$$n\alpha_n = (n - 2)\cdot 180^0.$$

Отсюда угол правильного n-угольника

$$\alpha_n = \frac{n-2}{n}\cdot 180^0$$

$$\alpha_n = \left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdot 180^0 = 180^0 - \frac{360^0}{n}$$

Получаем прогрессию суммы углов правильных n-угольников

$3\alpha_3 = (3 - 2)\cdot 180^0 = 1\cdot 180^0 = 180^0.$

$4\alpha_4 = (4 - 2)\cdot 180^0 = 2\cdot 180^0 = 360^0 = 3\alpha_3 + 180^0 = 180^0 + 180^0 = 360^0.$

$5\alpha_5 = (5 - 2)\cdot 180^0 = 3\cdot 180^0 = 540^0 = 4\alpha_4 + 180^0 = 360^0 + 180^0 = 540^0.$

$6\alpha_6 = (6 - 2)\cdot 180^0 = 4\cdot 180^0 = 720^0 = 5\alpha_5 + 180^0 = 540^0 + 180^0 = 720^0.$

$$n\alpha_n = (n-1)\alpha_{n-1} + 180^0.$$

$$S_n = S_{n-1} + 180^0.$$

Арифметическая прогрессия, в которой первый член является суммой углов правильного 3-ка

$$S_3 = 3\alpha_3 = 180^0.$$

Разность

$$d = 180^0.$$

$$S_n = S_{n-1} + 180^0.$$

$$S_n = n\alpha_n = (n - 2)\cdot 180^0.$$

Суммы углов правильных n-угольников

$3\alpha_3 = 180^0$.

$4\alpha_4 = 180^0 + 180^0 = 360^0$.

$5\alpha_5 = 360^0 + 180^0 = 540^0$.

$6\alpha_6 = 540^0 + 180^0 = 720^0$.

$7\alpha_7 = 720^0 + 180^0 = 900^0$.

Описанная около правильного многоугольника окружность

Окружность, описанная около многоугольника – это окружность, на которой лежат все вершины многоугольника.

Только одна окружность описывает правильный многоугольник.

Окружность, вписанная в правильный многоугольник

Окружность, вписанная в многоугольник – это окружность, касающаяся всех сторон многоугольника.

Только одну окружность можно вписать в правильный многоугольник.

Центры описанной и вписанной окружностей совпадают с центром правильного многоугольника.

Площадь, сторона правильного n-угольника

$$S = \frac{1}{2}\mathrm{Pr}$$

где P – периметр правильного многоугольника;

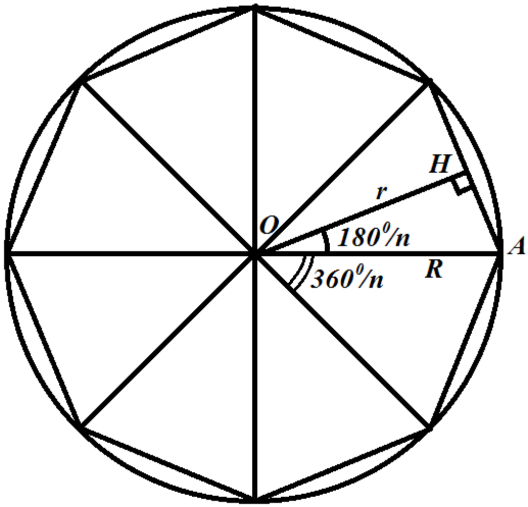
r – радиус вписанной окружности.

$$P = na_n,$$

где a_n – сторона правильного n-угольника.

$$S = \frac{1}{2}na_n r = n\frac{1}{2}a_n r = nS_\Delta,$$

где S_Δ – площадь одного из n равных треугольников, образующихся при соединении центра правильного n-угольника с его вершинами.



Сторона правильного n-угольника.

$$a_n = 2R\sin\frac{180^0}{n},$$

где R – радиус описанной окружности.

$$r = R\cos\frac{180^0}{n}$$

Длина окружности

$$C = 2\pi R$$

Длина дуги с градусной мерой α

$$\ell = \frac{2\pi R}{360^0}\cdot\alpha = \frac{\pi R}{180^0}\cdot\alpha$$

Площадь круга

$$S = \pi R^2$$

Площадь сектора с градусной мерой α

$$S = \frac{\pi R^2}{360^0} \cdot \alpha$$

Отображение плоскости на себя

Отображение плоскости на себя – это сопоставление каждой точке плоскости какой-то точке этой же плоскости.

Осевая симметрия является отображением плоскости на себя.

Движение плоскости

Движение плоскости – это сохраняющее расстояния отображение плоскости на себя.

Осевая симметрия является движением плоскости. Центральная симметрия плоскости является движением плоскости.

Теорема: «При движении отрезок отображается на равный ему отрезок».

Следствие: «При движении фигура отображается на равную ей фигуру».

Наложение является отображением плоскости на себя, при этом различные точки плоскости отображаются также в различные точки с сохранением расстояний.

Все наложения являются движением плоскости.

Теорема: «Все движения являются наложением».

Следствие: «При движении произвольная фигура отображается на равную ей фигуру».

Параллельный перенос на вектор $\vec{a}$ - это отображение плоскости на себя, при котором каждая точка плоскости отображается в точку на вектор $\vec{a}$.

Любой параллельный перенос является движением.

Поворотом плоскости вокруг заданной точки на данный угол называется отображение плоскости на себя, при котором любая точка в результате вращения вокруг заданной точки на данный угол отображается в точку.

Любой поворот является движением.

10 класс

Стереометрия

Стереометрия - раздел геометрии, изучающий фигуры в пространстве.

Основные фигур стереометрии: точки, прямые, плоскость.

Многогранники - геометрические тела с поверхностями, выстроенными из многоугольников.

Аксиомы стереометрии

Аксиома 1: через 3 точки, не принадлежащие одной прямой, проходит единственная плоскость.

Аксиома 2: Если в плоскости лежат 2 точки прямой, то прямая и все ее точки лежат в данной плоскости, то есть через прямую проходит данная плоскость.

Прямая и плоскость пересекаются в одной общей точке.

Аксиома 3: Если 2 плоскости пересекаются в общей точке, то они пересекаются и в общей прямой, содержащей все общие точки данных плоскостей, то есть плоскости пересекаются в прямой.

Следствия из аксиом стереометрии

Теорема: через прямую и не принадлежащую ей точку проходит единственная плоскость.

Теорема: через пару пересекающихся прямых проходит единственная плоскость.

Параллельные прямые в пространстве

Параллельными называются две не пересекающиеся прямые в пространстве, лежащие в одной плоскости.

Через точку, не принадлежащую данной прямой, проходит единственная прямая, параллельная данной прямой на плоскости и в пространстве.

Параллельность трех прямых

Если данную плоскость пересекает одна из двух параллельных прямых, то и вторая прямая пересекает данную плоскость.

Если прямые параллельны данной прямой, то все прямые параллельны.

Параллельность прямой и плоскости

Прямая и плоскость

Параллельными называются прямая и плоскость, не имеющие общих точек.

Если не принадлежащая данной плоскости прямая параллельна какой-то прямой, принадлежащей этой плоскости, то данные прямая и плоскость параллельны.

Если через данные параллельные прямую и плоскость проходит плоскость, содержащая данная прямую, то эта плоскость пересекает данную плоскость по прямой, параллельной данной прямой.

Угол между прямой и плоскостью

Угол между прямой и плоскостью равен 90^0, если прямая перпендикулярна плоскости или углу между прямой и ее проекцией на плоскость. Если прямая параллельна плоскости, то угол между ними равен 0^0.

Скрещивающиеся прямые

Скрещивающимися называются прямые, не лежащие в одной плоскости.

Если одна из двух прямых лежит в некоторой плоскости, а другая прямая пересекает эту плоскость в точке, не лежащей на первой прямой, то эти прямые скрещивающиеся [10; стр. 15].

Три случая расположения двух прямых в пространстве:

1)прямые пересекаются в одной общей точке, поэтому лежат в одной плоскости;

2)прямые параллельны, поэтому не пересекаются и лежат в одной плоскости;

3)прямые скрещиваются, поэтому не пересекаются и не лежат в одной плоскости.

Через каждую из двух скрещивающихся прямых проходит плоскость, параллельная другой плоскости, и притом только одна [10; стр. 16].

Правильная призма

Правильной называется прямая призма с основаниями - правильными многоугольниками.

Консультации автора по Skype: da.irk.ru

1. Авиационные, ракетные и автомобильные двигатели. Гиперзвуковые, прямоточные, ракетные, импульсные детонационные, пульсирующие, газотурбинные, поршневые двигатели внутреннего сгорания - теория, конструкция, расчет, прочность, проектирование, технология изготовления. Термодинамика, теплотехника, газовая динамика, гидравлика

2. Авиация, аэромеханика, аэродинамика, динамика полета, теория, конструкция, аэрогидромеханика. Сверхлегкие летательные аппараты, экранопланы, самолеты, вертолеты, ракеты, крылатые ракеты, аппараты на воздушной подушке, дирижабли, винты - теория, конструкция, расчет, прочность, проектирование, технология изготовления.

3. Генерация, внедрение идей. Основы научных исследований, методы генерации, внедрения научных, изобретательских, бизнес идей. Обучение приемам решения научных проблем, изобретательских задач. Научное, изобретательское, писательское, инженерное творчество. Постановка, выбор, решение наиболее ценных научных, изобретательских задач, идей.

4. Публикации результатов творчества. Как написать и опубликовать научную статью, подать заявку на изобретение, написать, издать книгу. Теория написания, защиты диссертаций. Зарабатывание денег на идеях, изобретениях. Консультирование при создании изобретений, написании заявок на изобретения, научных статей, заявок на изобретения, книг, монографий, диссертаций. Соавторство в изобретениях, научных статьях, монографиях.

5. Теоретическая механика (теормех), сопротивление материалов (сопромат), детали машин, теория механизмов и машин (ТММ), технология машиностроения, технические дисциплины.

6. Теоретические основы электротехники (ТОЭ), электроника, основы цифровой, аналоговой электроники.

7. Подготовка студентов по физике, математике, информатике, школьников желающих получить много баллов (часть С) и слабых учеников к ОГЭ (ГИА) и ЕГЭ. Одновременное улучшение текущей успеваемости путем развития памяти, мышления, понятного объяснения сложного, наглядного преподнесения предметов. Особый подход к каждому ученику. Подготовка к олимпиадам, обеспечивающим льготы при поступлении. 15-летний опыт улучшения успеваемости учеников.

8. Высшая математика, алгебра, геометрия, теория вероятности, математическая статистика, линейное программирование.

9. Аналитическая геометрия, начертательная геометрия, инженерная графика, черчение. Компьютерная графика, программирование графики, чертежи в Автокад, Нанокад, фотомонтаж.

10. Графы, деревья, дискретная математика.

11. OpenOffice и LibreOffice Basic, Visual Basic, VBA, макросы, VBScript, Бэйсик, С, С++, Делфи, Паскаль, Delphi, Pascal, C#, JavaScript, Fortran, html, Маткад. Создание программ, игр для ПК, ноутбуков, мобильных устройств.

12. Создание, размещение, раскрутка сайтов, заработки на сайтах, Web-дизайн, программирование сайтов.

13. Информатика, пользователь ПК: тексты, таблицы, презентации, обучение методу скоропечатания за 2 часа, базы данных, 1С, Windows, Word, Excel, Access, Gimp, OpenOffice, Автокад, nanoCad, Интернет, сети, электронная почта.

14. Устройство, ремонт компьютеров стационарных и ноутбуков.

15. Видеоблогер, создание, редактирование, размещение видео, видеомонтаж, зарабатывание денег на видеоблогах.

16. Понятное объяснение теории, ликвидация пробелов в понимании, обучение приемам решения задач, консультирование при

написании курсовых, дипломов.

17. Выбор, достижение целей, планирование.

18. Обучение зарабатыванию денег в Интернет: блогер, видеоблогер, программы, сайты, статьи, книги и др.

Skype: da.irk.ru

Сайты: www.super-code.ru www.da.irk.ru

e-mail: da.irk.ru@mail.ru

Опубликовано 12.05.17